Université Paris II
L3 Economie et Gestion - Magistère BF
Janvier 2019. 1h30

Mathématiques 5 (5305)
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère le problème suivant dans $I\!R_+^* \times I\!R_+^*$

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = \ln x_1 + 3\ln x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 3 \\ 2x_1^2 + 8x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
c) Résoudre le problème.

Exercice 2

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = x_1(x_2^2 - 1) \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
b) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
c) Montrer que ces conditions sont nécessaires.
d) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A admet 3 valeurs propres $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = -1/2$ et $\lambda_3 = -1$.
b) Que vaut le déterminant de A ?
c) A est-elle inversible?
d) Expliquer pourquoi A est diagonalisable dans $I\!R$.
e) Que vaut le déterminant de A^2 en fonction du déterminant de A ?
f) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).
g) Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3 \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ y_3' &= y_1 + \frac{3}{2}y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.
h) Résoudre le système différentiel linéaire.