Université Paris II — Mathématiques 5 (5305)

L3 Economie et Gestion — Cours de Mme HAYEK

Septembre 2017. 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A a une valeur propre simple égale à 12 et une valeur propre double égale à 6.

b) Que vaut le déterminant de A ?

c) A est-elle inversible?

d) Montrer que A est diagonalisable dans $I\!R$.

e) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).

f) Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' &= 9y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y_2' &= 6y_2 \\ y_3' &= 3y_1 - 3y_2 + 9y_3 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.

g) Résoudre le système différentiel linéaire.

Exercice 2

On considère le problème suivant dans $I\!R^3$:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 \leq 1 \\ \qquad\qquad x_3 \leq -2 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.

b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le problème suivant dans $I\!R^2$:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = x_1 - x_1x_2 \\ \qquad\qquad x_1 \leq 0 \\ \qquad\qquad -5 - x_1 + x_2 \leq 0 \\ \qquad\qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence d'une solution à ce problème.

b) Résoudre le problème.