

Septembre 2016 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n , symétrique.

- Donner la définition de : A est définie positive.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit définie positive.
- A est-elle inversible? Justifier la réponse.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

- Calculer les valeurs propres de A .
- Pour quelles valeurs de a , peut-on déjà affirmer que A est diagonalisable dans \mathbb{R} ?
- On pose $a = 4$. A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ?
Si oui trouver une matrice diagonale D et des matrices de passage P et P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$.
- On pose $a = 2$. A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ?
Si oui trouver une matrice diagonale D et des matrices de passage P et P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$.
Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$.

Exercice 3

Etudier la convergence des séries de terme général u_n dans les cas suivants:

$$(a) u_n = \frac{n^2}{1 + 5^n}, \quad (b) u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- $y'(x) + y(x) = 2x + 5, \quad y(0) = 2.$
- $2y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 1/9, \quad y'(0) = 0.$