Econométrie (4083)

Licence Economie-Gestion. Parcours Analyse Economique.

Professeur Georges Bresson

Session Janvier 2018

1. **Exercice 1** (3 points) - Soit un processus $AR(1)$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \mid \rho \mid < 1 \ , \ t = 1, ..., T$$

où $\varepsilon_t \sim iid\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ est indépendant de $u_0 \sim iid\left(0, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\tau}\right)$ et où τ est un paramètre arbitraire positif.

   (a) Montrez que cette variance arbitraire sur la perturbation initiale u_0 rend la perturbation u_t hétéroscédastique.

   (b) Montrez que la variance de u_t est croissante quand $\tau > \left(1 - \rho^2\right)$ et décroissante quand $\tau < \left(1 - \rho^2\right)$.

   (c) Quelle est la valeur de τ qui rend le processus u_t homoscédastique?

2. **Exercice 2** (4 points) - Soit le modèle

$$Y = X\beta + u \ , \ u \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$$

où Y (resp. X et β) est de taille $(n \times 1)$ (resp. $(n \times K)$ et $(K \times 1)$), I_n étant une matrice identité de taille $(n \times n)$. On souhaite estimer le modèle sous la contrainte

$$H_0 : R\beta = r$$

où R est une matrice de poids de taille $(l \times K)$, r est un vecteur de taille $(l \times 1)$, où $l \, (< K)$ est le nombre de contraintes. Sous H_0, la maximisation de la vraisemblance sous la contrainte $R\beta = r$ est équivalente à la minimisation de la somme des carrés des résidus sous la contrainte $R\beta = r$. Le Lagrangien est donné par

$$\Psi(\beta, \lambda) \quad = \quad (Y - X\beta)'(Y - X\beta) - 2\lambda' [R\beta - r]$$

où λ de taille $(l \times 1)$ est le multiplicateur de Lagrange. Sous H_0, la différenciation par rapport à β et σ^2 conduit à l'estimateur de λ

$$\widehat{\lambda} = \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(r - R\widehat{\beta}_{MCO}\right)$$

   (a) Montrez que, sous H_0, le multiplicateur de Lagrange $\widehat{\lambda}$ est distribué selon une loi normale

$$\widehat{\lambda} \sim N\left(0, \sigma^2 \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\right)$$

3. **Exercice 3** (7 points). - Soit le modèle linéaire général

$$y = X\beta + u = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \ , \ u \sim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$$

où I_T est une matrice identité de taille (T, T).

   (a) Ecrivez la log-vraisemblance du modèle et déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance de β et de σ^2.

   (b) Ecrivez le score $S(\beta) = \partial LogL\left(\beta, \sigma^2\right) / \partial\beta$ et montrez que la matrice d'information est bloc-diagonale.

(c) On souhaite tester l'hypothèse nulle:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_1^0 \text{ versus } H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^0$$

Dérivez les tests du rapport de vraisemblance (LR), de Wald (W) et du multiplicateur de Lagrange (ML) de ce test d'hypothèse et montrez que[1]:

$$\begin{aligned}
W &= \left(\beta_1^0 - \widehat{\beta}_1\right)' \left[X_1' \overline{P}_{X_2} X_1\right] \left(\beta_1^0 - \widehat{\beta}_1\right) / \widehat{\sigma}^2 \\
LR &= T.\log\left(\widetilde{u}'\widetilde{u}/\widehat{u}'\widehat{u}\right) \\
ML &= \widetilde{u}' X_1 \left[X_1' \overline{P}_{X_2} X_1\right]^{-1} X_1' \widetilde{u} / \widetilde{\sigma}^2
\end{aligned}$$

où $\widehat{\beta}$ (resp. $\widetilde{\beta}$) est l'estimateur du maximum de vraisemblance non contraint (resp. contraint). $\overline{P}_{X_2} = I_T - X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2'$, $\widehat{u} = y - X\widehat{\beta}$, $\widetilde{u} = y - X\widetilde{\beta}$, $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{u}'\widehat{u}/T$ et $\widetilde{\sigma}^2 = \widetilde{u}'\widetilde{u}/T$.

4. **Exercice 4** (6 points) - Un modèle à équations simultanées à correction d'erreur est de la forme

$$\left\{ \begin{aligned}
\Delta \ln(Y_{1t}) &= \phi_{12} \Delta \ln(Y_{2t}) - \theta_1 \left[\ln Y_{1,t-1} - (\alpha_1 + \gamma_{12} \ln Y_{2,t-1})\right] + \varepsilon_{1t} \\
\Delta \ln(Y_{2t}) &= \phi_{21} \Delta \ln(Y_{1t}) - \theta_2 \left[\ln Y_{2,t-1} - (\alpha_2 + \gamma_{21} \ln Y_{1,t-1})\right] + \varepsilon_{2t}
\end{aligned} \right. \quad (1)$$

où $\Delta \ln(Y_{1t}) = \ln(Y_{1t}) - \ln(Y_{1,t-1})$. Les variables $\Delta \ln(Y_{1t})$ et $\Delta \ln(Y_{2t})$ sont considérées comme endogènes et $\ln(Y_{1,t-1})$ et $\ln(Y_{2,t-1})$ comme prédéterminées.
Dans ce modèle, les coefficients d'ajustement θ_j, $j = 1, 2$ doivent être strictement positifs et définis par $0 < \theta_j < 1$ pour assurer la stabilité de chaque équation du système. Les termes entre crochets $[\ln Y_{j,t-1} - (\alpha_j + \gamma_{jl} \ln Y_{l,t-1})]$, $j, l = 1, 2$ sont appelées "erreurs d'équilibre", d'où l'expression de "modèle à correction d'erreur". L'expression $\ln Y_{j,t} = \alpha_j + \gamma_{jl} \ln Y_{l,t}$, $j, l = 1, 2$ est appelée "relation d'équilibre" (ou "équation de long terme") dans laquelle γ_{jl} est le coefficient de long terme, les coefficients de court terme étant donnés par ϕ_{jl}.
On dispose des cours de clôture journaliers des actions Google Y_{1t} et Amazon Y_{2t} sur la période du 31 mai 2012 au 31 octobre 2017. Les variables $\Delta \ln(Y_{1t}) = d\ln\_google$ et $\Delta \ln(Y_{2t}) = d\ln\_amazon$ sont donc les rendements journaliers. $\ln Y_{1,t-1} = \ln\_google\_1$ et $\ln Y_{2,t-1} = \ln\_amazon\_1$ sont les logarithmes des cours de clôture décalés d'une période. On estime un modèle non contraint

$$\left\{ \begin{aligned}
d\ln_google &= \beta_{10} + \beta_{11} d\ln_amazon + \beta_{12} \ln_google_1 + \beta_{13} \ln_amazon_1 + \varepsilon_{1t} \\
d\ln_amazon &= \beta_{20} + \beta_{21} d\ln_google + \beta_{22} \ln_amazon_1 + \beta_{23} \ln_google_1 + \varepsilon_{2t}
\end{aligned} \right. \quad (2)$$

On estime le système complet (2) par les GMM.

(a) Rappelez succinctement le principe de la méthode des GMM.

(b) Etudiez les conditions d'identification (conditions d'ordre seulement) de chacune des équations du système (2). Qu'en déduisez-vous?

(c) On utilise une correction HAC pour gérer l'hétéroscédasticité et l'autorrélation des résidus. Les instruments sont: $\Delta \ln(Y_{1,t-2})$, $\Delta \ln(Y_{1,t-3})$, $\Delta \ln(Y_{2,t-2})$, $\Delta \ln(Y_{2,t-3})$, $\ln(Y_{1,t-1})$, $\ln(Y_{1,t-2})$, $\ln(Y_{1,t-5})$, $\ln(Y_{2,t-1})$, $\ln(Y_{2,t-2})$ et $\ln(Y_{2,t-5})$. La commande Stata utilisée est

```
gmm (eq1:dlog_google -  {eq_Google: _cons dlog_amazon log_google_1 log_amazon_1 }) ///
    (eq2:dlog_amazon -  {eq_Amazon: _cons dlog_google log_amazon_1 log_google_1 }),  ///
instruments(eq1 eq2 : dlog_google_2 dlog_google_3 dlog_amazon_2 dlog_amazon_3 ///
     log_google_1 log_google_2 log_google_5 log_amazon_1 log_amazon_2 log_amazon_5 )
     winitial(unadjusted, independent) wmatrix(hac nwest opt) twostep
```

Interprétez les résultats de la table 1.

(d) Quelles conclusions tirez-vous du test d'Hansen-Sargan de restriction de sur-identification?

[1]On pourra utiliser la formule de l'inverse partitionnée:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

où $B_{11} = \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}\right)$.

(e) Ré-écrivez le modèle (1) avec les valeurs estimées issues de l'estimation du système (2). Donnez les relations d'équilibre. Interprétez les valeurs estimées des coefficients ϕ_{jl} et γ_{jl}, $j, l = 1, 2$.

(f) On calcule les valeurs estimées des cours de clôture journaliers des actions Google et Amazon par les relations $\widehat{Y}_{jt} = \exp\left(\ln Y_{j,t-1} + \widehat{\Delta \ln(Y_{jt})}\right)$, $j = 1, 2$. Commentez les résultats de la table 2 et les figures 1 et 2.

Aucun document autorisé.

Calculatrices et tables statistiques autorisées.

```
GMM estimation

Number of parameters =   8
Number of moments    =  22
Initial weight matrix: Unadjusted                 Number of obs   =      1,365
GMM weight matrix:     HAC Bartlett 17
                       (lags chosen by Newey-West)

------------------------------------------------------------------------------
             |                 HAC
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
eq_Google    |
 dlog_amazon |   .4235135   .0482854     8.77   0.000     .3288758    .5181512
log_google_1 |  -.0082643    .002595    -3.18   0.001    -.0133505   -.0031781
log_amazon_1 |   .0051411   .0015787     3.26   0.001      .002047    .0082353
       _cons |   .0215607    .008141     2.65   0.008     .0056046    .0375169
-------------+----------------------------------------------------------------
eq_Amazon    |
 dlog_google |   1.670417   .2257911     7.40   0.000     1.227875    2.112959
log_amazon_1 |  -.0073763   .0028399    -2.60   0.009    -.0129423   -.0018103
log_google_1 |   .0118568   .0047493     2.50   0.013     .0025484    .0211652
       _cons |  -.0307728   .0148846    -2.07   0.039    -.0599461   -.0015995
------------------------------------------------------------------------------
HAC standard errors based on Bartlett kernel with 25 lags.
   (Lags chosen by Newey-West method.)
Instruments for equation eq1: dlog_google_2 dlog_google_3 dlog_amazon_2
    dlog_amazon_3 log_google_1 log_google_2 log_google_5 log_amazon_1
    log_amazon_2 log_amazon_5 _cons
Instruments for equation eq2: dlog_google_2 dlog_google_3 dlog_amazon_2
   dlog_amazon_3 log_google_1 log_google_2  log_google_5 log_amazon_1
   log_amazon_2 log_amazon_5 _cons

Test of overidentifying restriction:
Hansen's J chi2(14) = 12.1926 (p = 0.5908)
```

Table 1: Estimation GMM.

variable	mean	sd	min	max
close_google	620.24283	187.65645	282.4013	1033.67
google_GMM	620.1133	187.6479	283.9836	1044.845
close_amazon	502.83011	247.79318	208.22	1110.85
amazon_GMM	502.928	247.803	204.3228	1110.454

Table 2: Statistiques sur les valeurs observées et estimées des cours de clôture journaliers des actions Google et Amazon.

Figure 1: Cours de clôture journaliers des actions Google et Amazon. Valeurs observées et estimées.

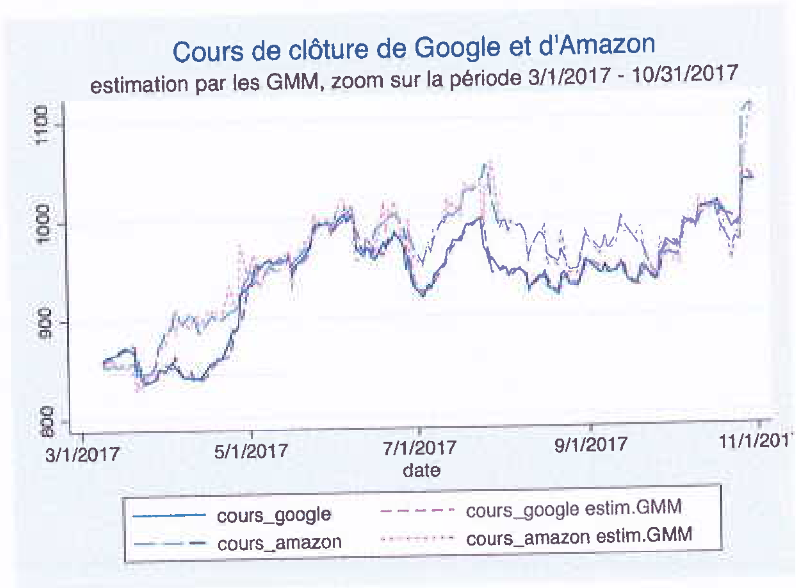

Figure 2: Cours de clôture journaliers des actions Google et Amazon.Valeurs observées et estimées. Zoom sur la période récente.