

Juin 2018 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , symétrique.

- Donner la définition de : la matrice  $A$  est définie positive.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $A$  soit définie positive.
- Montrer que si  $A$  est définie positive alors  $A$  est inversible.

### Exercice 2

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit  $|a| \geq 2$ . Calculer dans ce cas les valeurs propres de  $A$  en fonction de  $a$ .
- On pose  $a = 2$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse.
- Même question pour  $a = -2$ .
- On pose  $a = 4$ .
  - Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .
  - Trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . (Ne pas calculer  $P^{-1}$ ).
- Soit  $|a| < 2$ . Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 3

- Donner un exemple d'une série convergente qui n'est pas absolument convergente.
- Soit  $a$  un réel non nul. On considère la série de terme général  $u_n = \frac{a^n n^n}{n!}$ .
  - On pose  $a = 1$ . Etudier alors la convergence la série de terme général  $u_n$ .
  - Soit  $a > 1$ . Etudier alors la convergence la série de terme général  $u_n$ .
  - Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge pour  $|a| < 1/e$ .

### Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- $y'(x) + 4y(x) = 8x$ ,  $y(0) = 3/2$ .
- $y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .