- Annale de Mathématiques de Janvier 2018. HAYEK. -

Exercice 1

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$

$$\begin{cases} ax+by=0 & (1) \\ -bx+ay=0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \quad x = -\frac{by}{a}$

$(2) \Leftrightarrow -b \times \left(-\frac{by}{a}\right) + ay = 0$

$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} y + ay = 0$

$\Leftrightarrow y \left(\frac{b^2}{a} + a\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $b^2 + a^2 = 0$.

or $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2=1$ donc impossible

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$S = \{0;0\}$.

Exercice 2

a) - $\forall \vec{u} = (x, y, z, t)$ et $\forall \vec{v} = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(x+x', y+y', z+z', t+t')$

$= f(x, y, z, t) + f(x', y', z', t')$

$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

- $\forall \vec{u} = (x, y, z, t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^4$

$f(\lambda\vec{u}) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = \lambda f(x, y, z, t)$

$= \lambda f(\vec{u})$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) $\ker f = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^4 / f(\vec{u}) = \vec{0} \}$

$= \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / (x-y+z, 2x+y+3t, -2x+2y-2z) = (0,0,0) \}$

On résout $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+3t=0 \\ -2x+2y-2z=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z=-x+y \\ t=-\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}y \end{cases}$

$\ker f = \{ x(1,0,-1,-\frac{2}{3}) + y(0,1,1,\frac{1}{3}) / x,y \in \mathbb{R} \}$

Une base de $\ker f$ est $\{ (1,0,-1,\frac{2}{3}), (0,1,1,\frac{1}{3}) \}$ car ce système est libre et générateur.

donc $\dim \ker f = 2$.

c) $\dim \ker f + \dim f(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathbb{R}^4)$

donc $\dim f(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim \ker f = 4-2 = 2$.

d) Soit $\{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4} \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$f(\mathbb{R}^4)$ est engendré par $\{ f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}), f(\vec{e_4}) \} =$ $\{ (1,2,-2), (-1,-1,2), (1,0,-2), (0,3,0) \}$ ce système est lié puisque $\dim f = 2$

On extrait de ce système un système libre de deux vecteurs.

on peut prendre $\{ (1,0,-2), (0,3,0) \}$.

e) $\ker f \neq \{ \vec{0} \} \to f$ n'est pas injective

$\dim f(\mathbb{R}^4) \neq \dim \mathbb{R}^3$ $\quad \dim \mathbb{R}^3 > \dim f(\mathbb{R}^4)$

donc f n'est pas surjective

f n'est donc pas bijective

f) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

a) $B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (0,1,0)\}$

soit $\vec{u} = (1,1,1)$ $\vec{v} = (-1,1,1)$ $\vec{w} = (0,1,0)$

$\alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} + \alpha_3 \vec{w} = \vec{0}$

on utilise le pivot de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

D'où $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

or $\operatorname{card}(f) = 3$

donc f est libre et génératrice, le système B forme une base de $\mathbb{R}^3$

b) f injective $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0$

on va donc montrer $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + a\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2a\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha_3 = -2\alpha_1 \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha_3 = -2\alpha_1 \\ \alpha_2 = 0 \\ -a\alpha_3 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\forall a \in \mathbb{R}$, f est injective.

f surjective $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 3$.
cela correspond à ce que $\{(2,4,2), (0,-2,-4), (a, 2a, 2)\}$
soit une famille libre.
on cherche a / $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$,
$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$
si l'on reprend notre précédent système.
$-a\alpha_3 + 2\alpha_3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_3 \neq 0$ ou $a \neq 2$.
or $\alpha_3 = 0$ donc f est surjective $\forall a \neq 2$.

- f est bijective $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) On va calculer $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, $f(0,0,1)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'arrivée.
Puisque $(1,0,0) = \frac{1}{2}[(1,1,1) - (-1,1,1)]$ et f application linéaire,

$$f(1,0,0) = \frac{1}{2}[f(1,1,1) - f(-1,1,1)]$$
$$= \frac{1}{2}(2,4,2) - \frac{1}{2}(0,-2,-4)$$
$$= (1,2,1) - (0,-1,-2)$$
$$f(1,0,0) = (1,3,3).$$

De même avec $(0,1,0)$:
$f(0,1,0) = (a, 2a, 2)$.

Pour $(0,0,1)$:
$(0,0,1) = \frac{1}{2}[(1,1,1) + (-1,1,1) - 2(0,1,0)]$

$$f(0,0,1) = \frac{1}{2}[f(1,1,1) + f(-1,1,1) - 2f(0,1,0)]$$
$$= \frac{1}{2}[(2,4,2) + (0,-2,-4) - (2a, 4a, 4)]$$
$$= \frac{1}{2}[(2-2a, 2-4a, -2-4)]$$
$$f(0,0,1) = (1-a, 1-2a, -3)$$

suite de l'exercice 3

c) donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ a & 2a & 2 \\ 1-a & 1-2a & -3 \end{pmatrix}$$

d) On cherche le déterminant de A :

$$\det = 1 \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 1-2a & -3 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1-2a & -3 \end{vmatrix} + (1-a) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2a & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [-6a-(2-4a)] - a[-9-(3-6a)] + (1-a)[6-6a]$$

$$= -6a - 2 + 4a + 9a + 3a - 6a^2 + 6 - 6a - 6a + 6a^2$$

$$\det = -2a + 4.$$

Pour que A soit inversible :

$\det \neq 0 \Leftrightarrow -2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2.$

Donc $\forall a \neq 2$, et $a \in \mathbb{R}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{a-2} & 3 & \frac{3a-3}{a-2} \\ \frac{-a-2}{2a-4} & -\frac{3}{2} & \frac{-3a+2}{2a-4} \\ \frac{a}{2a-4} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2a-4} \end{pmatrix}$$