

Septembre 2018 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n , symétrique.

- Donner la définition de : la matrice A est semi-définie négative.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit semi-définie négative.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit $|m| \geq 4$. Calculer dans ce cas les valeurs propres de A en fonction de m .
- On pose $m = 4$. La matrice A est-elle diagonalisable dans \mathbb{R} ? Justifier la réponse.
- Même question pour $m = -4$.
- Soit $|m| < 4$. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .
- On pose $m = 8$.
 - Montrer que A est diagonalisable dans \mathbb{R} .
 - Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. (Ne pas calculer P^{-1}).

Exercice 3

- Etudier alors la convergence la série de terme général $u_n = \frac{3^n n^n}{n!}$.
- Etudier alors la convergence la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- $y'(x) + 6y(x) = -6, \quad y(0) = 2.$
- $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$