Université Paris II
L3 Economie et Gestion - Magistère
Janvier 2017. 1h30

Mathématiques 5 (5305)
Cours de Mme HAYEK

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A a une valeur propre simple égale à 4 et une valeur propre double égale à 2.
b) Que vaut le déterminant de A ?
c) A est-elle inversible?
d) Montrer que A est diagonalisable dans $I\!R$.
e) Trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ (Ne pas calculer P^{-1}).
f) Ecrire le système différentiel linéaire suivant sous forme matricielle:

$$(S) = \begin{cases} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$.
g) Résoudre le système différentiel linéaire.

Exercice 2

On considère le problème suivant dans $I\!R^2$:

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_2 \\ \qquad x_1^2 + x_2 \leq 6 \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \end{cases}$$

a) Ecrire le Lagrangien et les conditions de Kuhn et Tucker.
b) Montrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.
c) Résoudre le problème.

Exercice 3

On considère le problème suivant dans $I\!R^2$:

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad f(x_1, x_2) = -x_1x_2 \\ \qquad x_1 \geq 0 \\ \qquad 5 + x_1 - x_2 \leq 0 \\ \qquad x_2 \leq 10 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence d'une solution à ce problème.
b) Résoudre le problème.