Economie de l'incertain et de l'information L3

Durée de l'epreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

---

Rappel: La prime de risque Π qu'un individu, dont les préférences sont représentés par la fonction d'utilité élémentaire $u(.)$, associe à la loterie X se définit de la façon suivante:

$$u(\mathbb{E}(X) - \Pi) = \mathbb{E}u(X)$$

Exercice 1

Soit deux individus (1 et 2) risquophobes dont les fonctions d'utilité élémentaires sont respectivement notés $u_1(.)$ et $u_2(.)$, ces deux fonction étant liés par la relation suivante:

$$u_1(x) = f(u_2(x))$$

avec $f(.)$ une fonction croissante est concave: $f'(.) > 0$ et $f''(.) < 0$. Ces deux individus possèdent une même loterie (X) et nous noterons Π_1 et Π_2 la prime de risque que chacun d'eux associe à cette loterie.

1) En partant de la définition de la prime de risque, démontrez que $\Pi_1 > \Pi_2$. Vous exposerez clairement chacune des étapes de votre raisonnement.

2) Quels raisonnements économiques permettent de justifier le résultat démontré à la question 1).

Exercice 2

Considérons un individu possédant une voiture de valeur v (il ne possède pas d'autre richesse). Avec une probabilité 1/2 l'individu a un accident détruisant sa voiture (dans ce cas il perd v) et avec une probabilité 1/2 il n'a pas d'accident.

Cet individu a la possibilité de contracter une assurance lui permettant de toucher une indemnité z (avec $z \leq v$) en cas d'accident seulement. Pour bénéficier de cette couverture il devra payer une prime d'assurance $b = \beta z$ avec $\beta > 0$ le "prix unitaire" de l'assurance. Nous supposerons que $\beta \geq 1/2$. La fonction d'utilité élémentaire de l'individu est $u(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

1) Que signifie l'hypothèse $\beta \geq 1/2$?

2) Ecrivez la richesse de l'individu en fonction de z, de v et de β lorsque ce dernier a un accident et lorsqu'il n'en a pas. Déduisez-en la loterie à laquelle l'individu fait face pour un niveau donné de z.

L'individu est libre de choisir le niveau d'indemnité $z \in [0, v]$ qu'il désire.

3) Supposons que $\alpha = 2$, quel montant z l'individu choisira-t-il?

4) Même question pour $\alpha = 1/2$.

Exercice 3

Soit un individu dont la fonction d'utilité est $u(x) = \sqrt{x}$. Cet individu déclare être indifférent entre recevoir 9 euros avec certitude et recevoir une loterie lui permettant de gagner une somme S avec une probabilité p et 4 euros avec une probabilité $1 - p$.

1) Montrez que $S = (2 + 1/p)^2$. Comment expliquez vous la relation entre S et p?

2) Déterminez la prime de risque que l'individu associe à la loterie $[(p, 1-p), (S, 4)]$ pour $p = 1/2$.

Exercice 4

Considérons le problème d'assurance avec aléa moral suivant: un agent veut assurer sa propriété contre un risque d'incendie. La probabilité qu'un incendie ait lieu dépend de l'effort de prévention de l'agent $e \in \{e_H, e_L\}$ avec $e_H > e_L$. On suppose que la probabilité d'incendie si l'agent fait l'effort e_H est égale à $p(e_H) = 2/5$ alors que cette probabilité lorsque l'agent fait l'effort e_L est égale à $p(e_L) = 3/5$. Les coûts associés à chaque niveau d'effort sont: $g(e_H) = 1$ et $g(e_L) = 0$.

L'agent dispose d'une richesse initiale $w = 100$. On suppose que le dégât provoqué par l'incendie se traduit par une perte monétaire égale à 100. L'utilité de l'agent est donnée par la fonction suivante:

$$u_a(c, e) = \sqrt{c} - g(e)$$

avec c sa consommation.

Le contrat d'assurance spécifie un remboursement $\alpha \geq 0$ en cas d'incendie et une prime d'assurance $\beta \geq 0$ payée par l'agent **seulement dans le cas où il n'y a pas d'incendie**. Ainsi la consommation de l'agent qui contracte une telle assurance sera $c = w - \beta = 100 - \beta$ si il n'y a pas d'incendie et $c = \alpha$ si il y a un incendie. L'assureur (le principal) est neutre au risque, son utilité est égale à ses profits. L'utilité de l'assureur est donc $-\alpha$ si il y a un incendie et β si il n'y a pas d'incendie.

1) Montrez que l'utilité de réservation de l'agent (qui correspond à son utilité maximale dans le cas où il ne contracte pas d'assurance) est $\bar{u} = 5$.

2) Ecrire, en fonction de α et β, l'espérance d'utilité d'un agent qui décide de prendre une assurance et choisit l'effort e_H.

3) Ecrire, en fonction de α et β, l'espérance d'utilité de l'assureur (principal) lorsque l'agent décide de prendre l'assurance et choisit l'effort e_H.

4) Considérons d'abord le cas où l'effort est observable et supposons que le principal souhaite que l'agent choisisse e_H. Posez le problème d'optimisation du principal dans

ce cas (le principal choisit α et β de manière à maximiser son espérance d'utilité tout en s'assurant que l'agent accepte le contrat).

5) Résolvez ce programme et montrez, qu'à l'optimum, le principal choisira de fixer $\alpha = 100 - \beta$. Interprétez cette condition.

6) Plaçons nous maintenant dans le cas d'effort inobservable. Quel sera le niveau d'effort choisi par l'agent si l'assureur lui propose le même contrat qu'en cas d'effort observable? Expliquez.

7) Écrire le programme de maximisation de l'assureur si celui-ci veut inciter l'agent à choisir e_H. Nous avons vu en cours que, dans ce cas, le principal offre un contrat tel que les contraintes de participation et d'incitation sont saturées. Déduisez les valeurs optimales de α et β ainsi que le profit espéré de l'assureur.