

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la fonction f d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{3-x}{x-2} - \ln(x-2)$.

- Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- Montrer que f est dérivable et décroissante sur D_f .

On considère à présent la fonction g d'une variable réelle définie par :

$$g(x) = (3-x)\ln(x-2) + 6.$$

- Quel est l'ensemble de définition D_g de g ?
- Montrer que g est dérivable sur D_g et calculer g' .
- Montrer que g est strictement concave sur D_g .
- Soit a l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur D_f . Que représente a pour g ?

Exercice 2

Etudier les extrema des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition qui sera à préciser:

- $f(x) = x^3 - 9x - 9$.
- $f(x) = 3\ln(x+3) - 4x$.

Exercice 3

On considère la fonction f d'une variable réelle définie sur son ensemble de définition par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2-\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Calculer la limite de f quand x tend vers 0, f est elle continue en 0 ?
- Montrer que f est dérivable en 0 en utilisant la définition. Que vaut donc $f'(0)$?

Exercice 4

On considère la fonction de deux variables f définie par:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{\frac{x_2}{x_1}}$$

- Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
- Montrer que f est homogène sur D_f et trouver son degré d'homogénéité.
- Calculer les dérivées partielles de f sur D_f .
- Calculer la différentielle de f en $(1, 0)$ notée $df(1, 0)$.
- Donner une valeur approchée de $f(1,06; 0,01)$ à l'aide de $df(1, 0)$.