Université Paris II — **Mathématiques 1**
L1 Economie et Gestion — **Cours de Mme HAYEK**
Janvier 2020. 1h30
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1
On considère la fonction f d'une variable réelle définie sur son ensemble de définition par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{12} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3(x-2)}$.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3(x-2)}$ et en déduire que f est continue en 2.
d) Montrer que f est dérivable en 2 en utilisant la définition. Que vaut donc $f'(2)$?

Exercice 2
On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\ln(x+1) - x$, sur $]-1, +\infty[$.
a) Etudier le problème suivant:

$$\textit{Maximiser } f(x) \textit{ sur }]-1, +\infty[$$

On note α l'unique solution de ce problème.
b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (3\ln(x+1) - x)$.
d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\alpha, +\infty[$.
e) Existe-t-il une autre racine de $f(x) = 0$ sur $]-1, +\infty[$?

Exercice 3
a) Etudier les extrema de la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + \frac{57}{4}x.$$

b) Montrer que la fonction suivante

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$$

est convexe et la minimiser sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
Soit $(u_n)_n$ la suite de nombres réels définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + u_n^2}{9}, \quad u_0 \in]0, 3]$$

a) Montrer que : $\forall n \in I\!N,\ u_n > 0$
b) Montrer que : $\forall n \in I\!N,\ u_n \leq 3$
c) Montrer que la suite est monotone.
d) En déduire qu'elle est convergente.
e) Déterminer sa limite.

Exercice 5
Calculer les intégrales définies suivantes:

$$I_1 = \int_0^1 xe^x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$$