

Mai 2016 - 1h30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

### Exercice 1

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , symétrique, définie positive.

- Montrer que  $A$  est inversible.
- Montrer que  $A^{-1}$  est définie positive.

Soit  $b \in \mathbb{R}$ . Soit  $q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3) = 15x_1^2 + 20x_1x_2 + 15x_2^2 + bx_3^2.$$

- Trouver la matrice symétrique  $B$  associée à  $q$ .
- Etudier la nature de  $q$  suivant les différentes valeurs de  $b$ .
- Pour quelles valeurs de  $b$ ,  $B$  est-elle inversible?

### Exercice 2

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer les valeurs propres de  $A$  en fonction de  $a$ .
- Pour quelles valeurs de  $a$  peut-on déjà affirmer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ?

On pose  $a = 9$  dans la suite.

- Trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice de passage  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . (Ne pas calculer  $P^{-1}$ ).

- Soit  $X$  une matrice carrée d'ordre 3 et  $Y = P^{-1}XP$ . Montrer que  $X$  est solution de  $X^2 = A$  si et seulement si  $Y$  est solution de  $Y^2 = D$ .

On pose à présent  $a = 4$ .

- $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse.

### Exercice 3

- Etudier la convergence la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{8n^3 + n^2 + 9}$ .

- Etudier la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{n^n}{3^n n!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ .

- Etudier la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$  et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

### Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- $y'(x) + 10y(x) = 2x$ ,  $y(0) = 1/50$ .
- $y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 2e^{-5x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5/7$ .