Economie de l'incertain et de l'information L3

Durée de l'épreuve: 3h - Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés

Exercice 1 - Demande d'assurance

Considérons un individu possédant une richesse certaine ω ainsi qu'une voiture de valeur v. En utilisant sa voiture il fait face au risque d'avoir un accident. Nous noterons X la variable aléatoire décrivant le taux de sinistralité auquel fait face l'individu (c'est à dire, la part de la valeur v detruite par l'accident).

Cet individu a la possibilité de contracter une assurance du type co-assurance lui permettant de toucher une indemnité $I = avX$ si il paye une prime d'assurance $p = (1 + \lambda)\mathbb{E}(I)$. Les variables a et λ représentent respectivement le taux de couverture (choisi par l'agent) et le taux de charge (compris entre 0 et 1).

La fonction d'utilité élémentaire de cet individu est de type exponentielle négative:

$$u(x) = -\exp(-6x)$$

1) Écrire la richesse aléatoire de cet individu (que nous noterons W) en fonction de la variable aléatoire X, de la richesse ω, de la valeur v de la voiture, du taux de charge λ et du taux de couverture a.

2) Ecrivez l'espérance et la variance de W (notées $\mathbb{E}(W)$ et $\mathbb{V}(W)$) en fonction de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et des autres variables du modèle. Comment $\mathbb{E}(W)$ et $\mathbb{V}(W)$ varient-ils avec a? Expliquez les mécanismes à l'oeuvre.

3) En utilisant l'approximation de Pratt, donnez l'expression de la prime de risque que cet individu associe à la richesse aléatoire W (nous la noterons Π) en fonction de $\mathbb{V}(X)$ et des autres variables du modèle.

Partie 1. Dans cette partie nous supposerons que X est distribuée uniformément sur l'interval $[0,1]$ ($X \sim \mathcal{U}[0,1]$). Pour rappel, la fonction de densité associée à cette loi de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4) Utilisez cette fonction de densité pour montrer que $\mathbb{E}(X) = 1/2$ et $\mathbb{V}(X) = 1/12$.

5) En utilisant vos réponses aux questions 2), 3) et 4), déterminez les expressions de la prime de risque marginale ($\Pi_m = \frac{\partial \Pi}{\partial a}$) et de l'espérance de richesse marginale ($E_m = \frac{\partial \mathbb{E}(W)}{\partial a}$).

6) Représentez sur un même graphique Π_m et E_m en fonction de a. Faites apparaître sur ce graphique le taux de couverture optimal a^*.

7) Déterminez la valeur de a^*.

8) Représentez graphiquement et décrivez l'effet d'une augmentation de v sur a^* (une attention particulière sera portée à la précision de votre raisonnement).

Partie 2. Dans cette partie nous supposerons que X est distribuée selon une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$ et de variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). Nous pouvons en déduire que la richesse aléatoire W suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(W)$ et de variance $\mathbb{V}(W)$ ($W \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(W), \mathbb{V}(W))$).

9) Ecrivez la fonction de Markowitz représentant l'utilité que cet individu associe à la richesse aléatoire W.

10) Déterminez le taux de couverture optimal de cet individu (obtenu en maximisant la fonction d'utilité obtenue à la question précédente).

Exercice 2 - Aléa moral

Considérons le problème d'aléa moral suivant entre le propriétaire d'une entreprise (principal) et un manager (agent): Il existe deux niveaux d'effort possibles: $e \in \{e_H, e_L\}$, e_H représentant l'effort haut et e_L l'effort bas. Deux niveaux de bénéfices sont réalisables respectivement notés b_H et b_L avec $b_H > b_L$. Si l'effort du travailleur est e_H l'entreprise fait des bénéfices hauts (b_H) avec une probabilité $p(e_H) = p_H$, si cet effort est e_L la probabilité de bénéfices hauts est seulement $p(e_L) = p_L$, avec $p_H > p_L$. L'utilité de l'agent dépend du salaire qu'il reçoit (w) et de son effort e:

$$u_a(w, e) = v(w) - c(e) \quad \text{avec} \quad v'(w) > 0,$$

$c(e)$ représente le coût, en terme d'utilité, associé à un niveau d'effort e. L'utilité de réservation de l'agent (i.e. l'utilité qu'il peut s'assurer en refusant le contrat) est notée $\bar{u}$. L'utilité du principal dépend des bénéfices de l'entreprise (b) et du salaire qu'il verse (w):

$$u_p(\pi, w) = b - w$$

Partie 1: Agent neutre au risque. Dans cette partie nous supposerons que:

$$v(w) = 2w + 3$$

$$p_H b_H + (1 - p_H) b_L = 14$$

$$p_L b_H + (1 - p_L) b_L = 11$$

et que $c(e_L) = 2$, $c(e_H) = 4$ et $\bar{u} = 8$.

1) Supposons que l'effort soit observable. Le principal cherche à maximiser son profit sous la contrainte de participation de l'agent. Déterminez, dans ces conditions, les coûts salariaux espérés $(p(e)w_H + (1 - p(e))w_L)$ si le principal impose l'effort haut $(e = e_H)$ et si le principal impose l'effort bas $(e = e_L)$. [*Pour cette question, vous pourrez appliquer directement les résultats vus en cours.*]

2) Déduisez de votre réponse à la question précédente le niveau d'effort que le principal a intérêt à inscrire dans son contrat.

3) Supposons maintenant que l'effort est inobservable et que le principal met en place un contrat du type: $(w_H = b_H - \alpha, w_L = b_L - \alpha)$, avec α un montant constant choisi par le principal. Quel niveau d'effort l'agent a-t-il intérêt à choisir si il accepte ce contrat.

4) Dans le cadre de la question précédente, déterminez le niveau α (noté α^*) qui maximise l'espérance d'utilité du principal.

Partie 2: Agent averse au risque. Dans cette partie nous supposerons que $b_H = 10$, $b_L = 0$, $p_H = 2/3$, $p_L = 1/3$, $c(e_H) = 5/3$, $c(e_L) = 4/3$ et $\bar{u} = 0$ et que:

$$v(w) = \ln(w)$$

Nous considérerons aussi que l'effort est inobservable et que le principal souhaite que l'agent choisisse l'effort haut.

5) Posez le problème d'optimisation du principal dans ce cas. Déduisez-en le Lagrangien associé.

6) Ecrire les deux conditions du premier ordre associées au problème posé à la question précédente.

7) Démontrez que les contraintes de participation et d'incitation associées à ce problème sont saturées à l'optimum.

8) Déduisez-en les valeurs de $\ln(w_L)$ et $\ln(w_H)$ qui correspondent à la solution du problème du principal.